FS-1112: PRIMER PARCIAL

Universidad Simón Bolívar

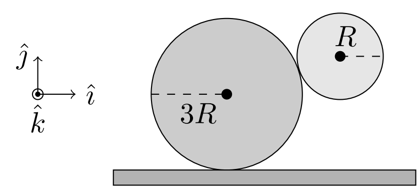
Julio - Agosto 2019

Sartenejas, 05 de agosto de 2019

Nombre:____. **Carné**:__________________. **Sección**:_____.

Parte I: Selección simple (20 puntos). A continuación se presentan 10 preguntas con un valor de 2 puntos cada una. Marque con una **X** la opción que considere correcta, justificando debidamente en cada caso su respuesta. **La falta de justificación anula la respuesta. Cada planteamiento tiene una única respuesta correcta, por lo que marcar más de una opción anula la respuesta**. No hay factor de corrección.

La figura adjunta muestra la vista lateral de una sección del mecanismo de una máquina compleja. Dicha sección consta de una barra que se mueve horizontalmente y dos engranajes de radios R y $3R$, respectivamente. El engranaje de radio R gira con velocidad angular $\vec{\omega} = \omega_0 \operatorname{sen}(at^2 + b)\,\hat{k}$, donde ω_0, a y b son constantes de las dimensiones apropiadas. Sobre la base de este planteamiento responda las dos preguntas que se plantean a continuación:

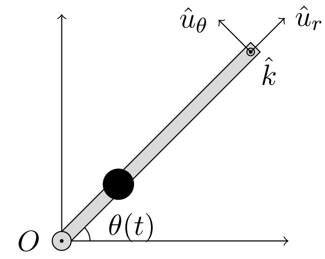


1. (2 ptos.) El vector aceleración angular del engranaje de radio $3R$ es:
   ( ) $-\frac{2}{3}\omega_0 at\cos(at^2 + b)\,\hat{k}$
   ( ) $\frac{1}{3}\omega_0 \operatorname{sen}(at^2 + b)\,\hat{k}$
   ( ) $-3\omega_0 \cos(at^2 + b)\,\hat{k}$
   ( ) $\frac{\omega_0 at}{3R} \operatorname{sen}(at^2 + b)\,\hat{k}$
   ( ) Ninguna de las anteriores.

2. (2 ptos.) La velocidad de la barra está dada por:
   ( ) $-\frac{2}{3}R\omega_0 \operatorname{sen}(at^2 + b)\,\hat{\imath}$
   ( ) $3R\omega_0 at\cos(at^2 + b)\,\hat{\imath}$
   ( ) $\omega_0 \operatorname{sen}(at^2 + b)\,\hat{\imath}$
   ( ) $-R\omega_0 \operatorname{sen}(at^2 + b)\,\hat{\imath}$
   ( ) Ninguna de las anteriores.

3. (2 ptos.) Dos satélites artificiales de masas m_1 y $m_2 = 9m_1$, rotan alrededor de la Tierra en órbitas circulares con radios R_1 y $R_2 = 16R_1$, respectivamente. La relación entre la rapidez v_1 de m_1 y la de la rapidez v_2 de m_2 en sus órbitas es:
   ( ) $v_1 = 4\,v_2$
   ( ) $v_1 = \frac{27}{4}\,v_2$
   ( ) $v_1 = \frac{1}{4}\,v_2$
   ( ) $v_1 = 108\,v_2$
   ( ) Ninguna de las anteriores.

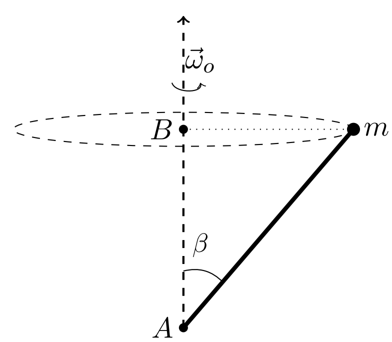
Una barra de masa M y longitud l rota en torno a un eje que pasa por el punto O, siendo su posición angular $\theta(t) = \pi \sin(\beta t)$. En ella hay una cuenta de masa m que desliza sin fricción y que tiene una velocidad respecto a la barra dada por $\vec{v} = v_o \hat{u}_r$. Considere la base de vectores móviles en coordenadas cilíndricas, $\{\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{k}\}$ y responda las siguientes dos preguntas:



4. (2 ptos.) El vector velocidad $\dot{\vec{r}}(t)$ de la cuenta como función del tiempo viene dado por:
( ) $v_o[\hat{u}_r - \pi\beta t \cos(\beta t)\hat{u}_\theta]$
( ) $v_o[\hat{u}_r + \pi\beta t \cos(\beta t)\hat{u}_\theta]$
( ) $v_o[\hat{u}_r + \pi\beta t \sin(\beta t)\hat{u}_\theta]$
( ) $v_o[\hat{u}_r - \pi\beta t \sin(\beta t)\hat{u}_\theta]$
( ) Ninguna de las anteriores.

5. (2 ptos.) El vector aceleración $\ddot{\vec{r}}(t)$ de la cuenta como función del tiempo viene dado por:
( ) $v_o\{\pi^2\beta^2 t \cos^2(\beta t)\hat{u}_r + [\pi\beta^2 t \sin(\beta t) - 2\pi\beta \cos(\beta t)]\hat{u}_\theta\}$
( ) $v_o\{\pi^2\beta^2 t \cos^2(\beta t)\hat{u}_r - [\pi\beta^2 t \sin(\beta t) - 2\pi\beta \cos(\beta t)]\hat{u}_\theta\}$
( ) $-v_o\{\pi^2\beta^2 t \cos^2(\beta t)\hat{u}_r + [\pi\beta^2 t \sin(\beta t) - 2\pi\beta \cos(\beta t)]\hat{u}_\theta\}$
( ) $-v_o\{\pi^2\beta^2 t \cos^2(\beta t)\hat{u}_r - [\pi\beta^2 t \sin(\beta t) - 2\pi\beta \cos(\beta t)]\hat{u}_\theta\}$
( ) Ninguna de las anteriores.

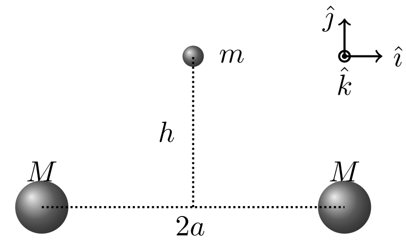
Una barra de masa despreciable tiene longitud $\mathcal{L}$ y en su extremo se encuentra unida una bola de masa m y radio despreciable, la cual se mueve solidariamente con la barra. El sistema barra-bola rota en torno a un eje vertical con rapidez angular constante ω_o y unba inclinación contante dada por el ángulo β. Sobre la base de este planteamiento y usando la base de vectores móviles en coordenadas cilíndricas, $\{\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{k}\}$, responda las siguientes preguntas:



6. (2 ptos.) El momentum angular $\vec{L}$ medido desde el punto B viene dado por:
( ) $m\mathcal{L}^2\omega_0\,\hat{k}$
( ) $-m\mathcal{L}^2\omega_0(\sin\beta\cos\beta\,\hat{u}_r - \sin^2\beta\,\hat{k})$
( ) $m\mathcal{L}^2\omega_0\cos^2\beta\,\hat{k}$
( ) $m\mathcal{L}^2\omega_0\sin^2\beta\,\hat{k}$
( ) Ninguna de las anteriores.

7. (2 ptos.) El momentum angular $\vec{L}$ medido desde el punto A viene dado por:
( ) $m\mathcal{L}^2\omega_0\,\hat{k}$
( ) $-m\mathcal{L}^2\omega_0(\sin\beta\cos\beta\,\hat{u}_r - \sin^2\beta\,\hat{k})$
( ) $-m\mathcal{L}^2\omega_0(\sin^2\beta\,\hat{u}_r - \sin\beta\cos\beta\,\hat{k})$
( ) $m\mathcal{L}^2\omega_0\sin^2\beta\,\hat{k}$
( ) Ninguna de las anteriores.

Tres cuerpos con masas m y M, están dispuestos en un plano tal como se aprecia en la figura. Los centros de masa de los cuerpos dispuestos en el eje X están separados por una distancia $2a$ y el del cuerpo dispuesto en el eje Y está separado del eje X por una distancia h. Se define el ángulo θ tal que $\tan\theta = \frac{h}{a}$. Con base en esto, responda las dos preguntas que se plantean a continuación:



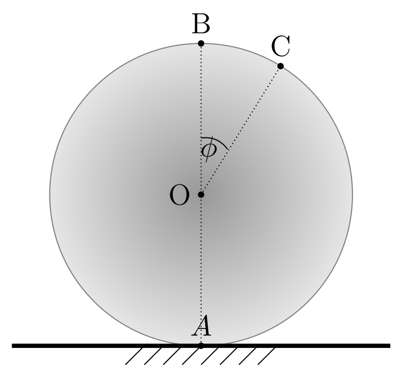
8. (2 ptos.) La fuerza total $\vec{F}_G$ que ejercen los dos cuerpos de masa M sobre el de masa m viene dada por:

( ) $-\frac{2GmM}{a^2+h^2}\sin\theta\hat{\jmath}$
( ) $\frac{2GmM}{a^2+h^2}(\sin\theta\hat{\imath} - \cos\theta\hat{\jmath})$
( ) $-\frac{2GmM}{a^2+h^2}(\cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath})$
( ) $-\frac{2GmM}{a^2+h^2}\cos\theta\hat{\jmath}$
( ) Ninguna de las anteriores.

9. (2 ptos.) Si el cuerpo de masa m parte del reposo desde $h = 3a$, la rapidez que va a tener al pasar el eje X es:

( ) $\sqrt{\frac{6GM}{a}}$
( ) $\sqrt{\frac{2GM}{3a}}$
( ) $\sqrt{\frac{3GM}{a}}$
( ) $\sqrt{\frac{3GM}{2a}}$
( ) Ninguna de las anteriores.

10. (2 ptos.) Un disco de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre una superficie rugosa con una rapidez angular ω_o. La velocidad de traslación del punto C viene dada por:



( ) $R\omega_o\cos\phi$
( ) $R(1+\sin\phi)\omega_o$
( ) $R(1+\cos\phi)\omega_o$
( ) $R\omega_o\sin\phi$
( ) Ninguna de las anteriores.

Parte II: Problema de desarrollo (15 puntos). A continuación se presenta un problema que debe desarrollar. Justifique cada argumento siendo coherente, claro, conciso, ordenado y escribiendo con letra legible.

11. Johannes Kepler (1571-1630) estableció sus tres leyes sobre el movimiento de los planetas en su órbita alrededor del Sol a partir de los datos recopilados por Tycho Brahe (1546-1601), con quien trabajó desde 1600 en la ciudad de Praga, en la actual República Checa. Su primera ley establece que los planetas siguen órbitas elípticas, con el Sol en uno de sus focos; la segunda ley establece que los radios orbitales de los planetas barren una misma área a un mismo intervalo de tiempo; mientras que la tercera ley habla de la proporcionalidad de los cubos de los radios orbitales y los cuadrados de los períodos orbitales. Con base en esto, y suponiendo que la masa del planeta es m, responda las siguientes preguntas:
    (a) (3 ptos.) Demuestre que las leyes de Kepler implican que la fuerza gravitacional es una fuerza de tipo central.
    (b) (6 ptos.) Demuestre que la fuerza gravitacional es de tipo $\vec{F}_G = -\frac{\kappa}{r^2}\,\hat{u}_r$. Recuerde que la ecuación paramétrica de una elipse centrada en el foco del primer cuadrante es de la forma $r(\theta) = \frac{\eta}{1+\epsilon\cos\theta}$, siendo ϵ la excentricidad de la elipse y $\eta = a(1-\epsilon^2)$ y a la distancia del semieje mayor.
    (c) (6 ptos.) Demuestre la tercera ley de Kepler para una órbita elíptica de semieje mayor a y excentricidad ϵ usando que $\vec{F}_G = -G\frac{mM_s}{r^2}\,\hat{u}_r$, donde M_s es la masa del Sol.